

حلول التمارين و المسائل

01 النهايات - الإستمرارية

1 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 3x) = 0$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\cos \frac{1}{x} - 2 \right) = -\infty$

6 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$

7 $n \leq E(x) < n+1$ حيث n هو الجزء الصحيح للعدد x .

$\frac{n}{x} \leq \frac{E(x)}{x} < \frac{n+1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{x} = 0$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 0$

8 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7}$

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = +\infty$

9 $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 + 6x + 9}{2x + 3} = \frac{9}{2}$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = +\infty$

10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1$

11 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-5}{x+1} - \frac{\sin x}{x} \right) = 3$

12 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$

14 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1$

15 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = -2$

16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}$

17 $x = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

18 $y = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل.

19 $x = 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

20 $y = x + 2$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

21 $y = x + 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

22 $x = 5$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

23 المنحنى (\mathcal{C}) يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

24 $x = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

25 المنحنى (\mathcal{C}) يقبل منحنى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

26 المنحنى (\mathcal{C}) يقبل منحنى تقاربيا باتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

27 المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين معادلتهما $y = x$ و $y = -x$.

28 المنحنى (\mathcal{C}) يقبل منحنى تقاربيا و هو منحنى المستقيم ذي المعادلة $y = \sqrt{2} x$.

29 و منحنى و المستقيم ذي المعادلة $y = -\sqrt{2} x$.

30 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

31 إذن (\mathcal{C}) لا يقبل مستقيما مقاربيا بجوار $+\infty$.

26 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1$

إذن f مستمرة عند 1.

27 f ليست معرفة عند العدد 0 إذن f

ليست مستمرة عند العدد 0.

28 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f(0)$

إذن f مستمرة عند العدد 0.

29 f ليست معرفة عند 0. إذن f ليست

مستمرة عند 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

f مستمرة عند العدد 0 عن اليمين وعن اليسار.

30 1. f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R} .

2. f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$

و $f(0) \times f(1) < 0$ إذن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$

تقبل حلا واحد في المجال $]0; 1[$.

لدينا $f(\frac{1}{2}) < 0$ و $f(\frac{3}{4}) > 0$.

الحل x_0 ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[$.

31 1. الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما

على \mathbb{R}^+ و متناقصة تماما على \mathbb{R}^- .

2. f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$

و $f(0) \times f(1) < 0$ إذن المعادلة $x^6 + x^2 - 1 = 0$

تقبل حلا واحد في المجال $]0; 1[$.

لدينا $f(1) > 0$ و $f(\frac{3}{4}) < 0$.

32 1. الدالة f معرفة و مستمرة على \mathbb{R} .

$f'(x) = 3x^2 - 3$

f متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$.

f متناقصة تماما على $[-1; 1]$ 136

2. f متناقصة تماما على $[-1; 1]$ و مستمرة على

$[-1; 1]$ و $f(-1) \times f(1) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $]-1; 1[$.

33 1. f معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

نعتبر الدالة g حيث $g(x) = f(x) - 2$

g مستمرة على $]-\infty; -1[$ و $]-1; +\infty[$.

$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$

g متزايدة على $]-\infty; -2[$ و $]0; +\infty[$

g متناقصة على $]-2; -1[$ و $]0; -1[$.

2. g معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على $[2; 3]$

و $g(2)g(3) < 0$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحد في $[2; 3]$

بالتالي المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا واحد في $[2; 3]$.

34 لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$f(x) = x - \cos x$: $f'(x) = 1 + \sin x$

الدالة f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R}

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

إذن المعادلة تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} .

و بالتالي المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا واحدا في \mathbb{R} .

35 لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$

الدالة f معرفة و مستمرة على \mathbb{R} .

$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$

f متناقصة على $]-\infty; \frac{1}{3}[$ و $]\frac{1}{3}; +\infty[$

و متزايدة على $[\frac{1}{3}; 1]$.

لدينا f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على

$[1; 3]$ و $f(1) \times f(3) < 0$

إذن المعادلة تقبل حلا واحد في $[1; 3]$

حلول التمارين و المسائل

40 1. مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$\varphi(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^2} \quad ; \quad b=1 \quad ; \quad a=1$$

$$f(x) = x+1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

3. $x = -1$ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.

$y = x + 1$ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

41 حجم المكعب هو x^3 .

حجم المتوازي المستطيلات هو $3(3x+4)$.

حل المعادلة $x^3 = 3(3x+4)$ في \mathbb{R}_+^* .

لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R}_+^* كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 9x - 12$$

الدالة f مستمرة \mathbb{R}_+^* ، متزايدة على $[\sqrt{3}; +\infty[$

و متناقصة على $[0; \sqrt{3}]$.

$$f(4) = 16 \quad \text{و} \quad f(3) = -12$$

$$f(3) \times f(4) < 0 \quad \text{و} \quad \text{بالتالي المعادلة } f(x) = 0$$

تقبل حلا واحدا في المجال $]3; 4[$.

$$f(3,5) = -0,625 \quad \text{و} \quad f(3,6) = 2,256$$

$$f(3,5) \times f(3,6) < 0$$

إذن الحل x ينتمي إلى المجال $]3,5; 3,6[$.

و بالتالي يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات من أجل قيمة x حيث

$$3,5 < x < 3,6$$

36 1. f معرفة على $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$.

$$c = 19 \quad ; \quad b = -9 \quad ; \quad a = 5$$

$$f(x) = 5x - 9 + \frac{19}{x+2}$$

2. (\mathcal{E}_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور

الترتيب معادلته $x = -2$ و مستقيم مقارب مائلا

(Δ) معادلته $y = 5x - 9$.

في المجال $]-\infty; -2[$ ، (\mathcal{E}_f) تحت (Δ) .

في المجال $]-2; +\infty[$ ، (\mathcal{E}_f) فوق (Δ) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m = 0 \quad \text{37}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-m)x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - mx}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad 0 < m < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad m < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad -1 < m < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad m = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad m < -1$$

38 الدالة $x \mapsto x^2 + x + 1$ مستمرة على

\mathbb{R} و الدالة \sin مستمرة على \mathbb{R} الدالة h هي

مركب الدالتين $x \mapsto x^2 + x + 1$ و $x \mapsto \sin x$ ،

فهي مستمرة على \mathbb{R} . و بالتالي الدالة h مستمرة

عند كل عدد حقيقي x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \quad \text{39}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

02 الاشتقاق

1 • f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 2$.

2 • f قابلة للاشتقاق عند 5 و $f'(5) = \frac{9}{4}$.

3 • f قابلة للاشتقاق عند -2 و $f'(-2) = 192$.

4 • f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -1$.

5 • f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6 • f قابلة للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = -12$.

7 • f قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و $f'(0) = 0$.

8 • f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2 • 1 $y = 7x - 14$.

2 • المنحنى يقبل نصف مماس يوازيان محور الترتيب في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلتهما

$x = 1$ حيث $x \geq 1$ و $x = 1$ حيث $x \leq 1$.

3 • $y = 12x - 24$: $y = -12x + 24$

4 • $x = 0$ على المجال $[0; +\infty[$.

5 • المنحنى يقبل نصف مماس يوازيان محور

الترتيب في النقطة A فاصلتها 2، معادلتهما

$x = 2$ حيث $x \geq 2$ و $x = 2$ حيث $x \leq 2$.

6 • المنحنى يقبل نصف مماس معادلتهما

$y = 4x - 3$ حيث $x \geq 1$

$y = 1$ حيث $x \leq 1$

7 • المنحنى يقبل نصف مماس عن اليمين عند نقطة

فاصلتها -2، يوازي محور الترتيب و معادلته

$x = -2$ حيث $x \geq -2$.

3 • 1 $f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2}$: $D' = \mathbb{R} - \{0\}$.

2 • $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2}$: $D' = \mathbb{R} - \{2\}$.

3 • $f'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 4}{4(1-x)^2}$: $D' = \mathbb{R} - \{1\}$.

4 • $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x+1)^2}$: $D' = \mathbb{R} - \{-1\}$.

5 • $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x+1)^2}$: $D' = \mathbb{R} - \{-1\}$.

6 • $f'(x) = 2 + \frac{4}{(1-x)^3}$: $D' = \mathbb{R} - \{1\}$.

7 • $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$: $D' =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

8 • $f'(x) = \frac{\sqrt{2}(3x-1)}{2\sqrt{x}}$: $D' = [0; +\infty[$.

9 • $f'(x) = \frac{-2}{(2+x)^2} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$: $D' =]-2; 2[$.

10 • $f'(x) = -\frac{1}{2} \cos \pi x + \left(\frac{2x+1}{4}\right) \pi \sin \pi x$: $D' = \mathbb{R}$.

11 • $f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$: $D' =]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$.

12 • $D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$f'(x) = \frac{2(\cos 2x - \sin 2x + 1)}{(1 - \sin 2x)^2}$

4 • f مستمرة عند 1.

f قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 0$.

5 • 1 $Df = \mathbb{R} - \{0\}$.

2 • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{2}$.

الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = \frac{1}{2}$.

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 فإنها مستمرة عند 0.

6 • 1 $f'(x) = 3x^2(1-x)^2(1-2x)$: $D = \mathbb{R}$.

f متزايدة على $]-\infty; \frac{1}{2}]$

و متناقصة على $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

حلول التمارين و المسائل

7 دالة ناطقة إذن f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ و قابلة للاشتقاق n مرة على $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$.

من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

8 1. $f^{(6)}(x) = 0$: $n \geq 6$

2. من أجل كل عدد x من $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$$

3. من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{9}$$

$$-9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

إذن f حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 9y = 0$.

10 2.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ -∞	+∞ ↘ 0	

3. $(T_A) : y = -8x + 12$: $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

4. يكفي إثبات أن من أجل كل عدد x من Df

$$f(3-x) = -f(x)$$

11 (أ) 2. جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	-∞ ↗ -1	-1 ↘ -2	-2 ↗ +∞	+∞

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad D = \mathbb{R}_+ \quad \cdot 2$$

f متزايدة على $\left[\frac{25}{4}; +\infty\right[$

و متناقصة على $\left]0; \frac{25}{4}\right]$.

3. $D = \mathbb{R} - \{2\}$:

$$f'(x) = \frac{3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)^2}$$

f متزايدة على $]2+\sqrt{3}; +\infty[$ و $]-\infty; 2-\sqrt{3}]$

f متناقصة على $]2; 2+\sqrt{3}]$ و $[2-\sqrt{3}; 2[$.

$$f'(x) = -1 + \frac{8}{x^3} \quad ; \quad D = \mathbb{R} - \{0\} \quad \cdot 4$$

f متزايدة على $]0; 2]$

f متناقصة على $]2; +\infty[$ و $]0; -\infty]$.

$$f'(x) = 1 + \cos x \quad ; \quad D = \mathbb{R} \quad \cdot 5$$

f متزايدة على \mathbb{R} .

$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \cdot 6$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$$

f متناقصة على كل مجال محتوي في D .

$$f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 12x^2 \quad ; \quad D = \mathbb{R} \quad \cdot 7$$

f متزايدة على \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{7}{(x+1)^2} \quad ; \quad D = \mathbb{R} - \{-1\} \quad \cdot 8$$

f متزايدة على $]-1; +\infty[$ و $]-\infty; -1[$.

$$f'(x) = \frac{-7}{(2x-5)^2} \quad ; \quad D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\} \quad \cdot 9$$

f متناقصة على $\left] \frac{5}{2}; +\infty\right[$ و $]-\infty; \frac{5}{2}]$.

$$f'(x) = 12x^2 - 12x \quad ; \quad D = \mathbb{R} \quad \cdot 10$$

f متزايدة على $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$.

f متناقصة على $[0; 1]$.

حلول التمارين و المسائل

4. $b \in \mathbb{R} : f(x) = 6\sqrt{x} + b$

5. $b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + b$

6. $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} : f(x) = ax + b$

7. $c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$

8. $c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + bx + c$

9. $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + bx + c$

$c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

10. $f(x) = -\frac{9}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{3}x + bx + c$

$c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

14. $f''(x) = \frac{2}{(x-a)^3} : f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$

$f'''(x) = \frac{-6}{(x-a)^4}$

2. $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$

3. $g(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$

$g^{(n)}(x) = \frac{-\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

15. $h(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$

$h(x) > 0$ من أجل $x > 1$

$h(x) = 0$ من أجل $x = 1$

$h(x) < 0$ من أجل $x < 1$

2. $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

ب. $f(x) = x^2 - x + \frac{4}{(x+1)}$

$c = 4 : b = -1 : a = 1$

ج. $f(x) - g(x) = \frac{4}{x+1}$

2. f مستمرة و متزايدة تماما على $[1,6 ; 1,7]$

و $f(1,6) f(1,7) < 0$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحد α حيث $1,6 < \alpha < 1,7$

ب. 1

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+
$g(x)$	0	$+\infty$	β	0

$\beta = g(\alpha) : 1,6 < \alpha < 1,7$

2. $(\Delta) : y = -x + 1$

3. نضع $d(x) = g(x) - (-x + 1) = \frac{(x-1)x^3}{x^3 + 1}$

إذا كان $0 \leq x \leq 1$ فإن $d(x) \leq 0$

إذا كان $-1 < x \leq 0$ فإن $d(x) \geq 0$

(1 ; 0) حل للجملة $\begin{cases} y = g(x) \\ y = -x + 1 \end{cases}$

4. معادلة (T) هي $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

12. 1. $b = 0 : a = 4$

2. $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	3	-1	4	3

(ع) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل

معادلته $y = 3$

13. 1. $a \in \mathbb{R} : f(x) = a$

2. $b \in \mathbb{R} : f(x) = -5x + b$

3. $b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x + b$

حلول التمارين و المسائل

03 الدوال الأصلية

1 الدالة F معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

1. $F'(x) = 3x^2 - 1 = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

2. الدالة F معرفة وقابلة للاشتقاق

على $]-1; +\infty[$ و $F'(x) = \sqrt{x+1} = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$

3. الدالة F معرفة وقابلة للاشتقاق

على $]0; +\infty[$ و $F'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f

على $]0; +\infty[$

4. الدالة F معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

و $F'(x) = \cos x - x \sin x = f(x)$

إذن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

2 الدالة $F : x \mapsto 2\sin^2 x$

هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x) = 2 \sin 2x$

على \mathbb{R} لأن الدالة L معرفة وقابلة للاشتقاق

على \mathbb{R} و $L'(x) = f(x)$.

3 1. $F(x) = -\frac{7}{12} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

2. $F(x) = 1 + \cos 2x$

3. $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin 3x$

4. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{2}$

4 1. الدوال F حيث $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} : $c \in \mathbb{R}$

2. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c$

3. $F(x) = -\cos x - 2 \sin x + c$

4. $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + c$

5. $F(x) = 4 \sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + c$

6. $F(x) = x - \tan x + c$

7. $F(x) = \frac{1}{5}(x-3)^5 + c$

8. $F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$

9. $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+4)^3 + c$

10. $F(x) = -\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 + c$

11. $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3 + c$

12. $F(x) = -\frac{1}{(x-3)} + c$

13. $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + c$

14. $F(x) = \frac{1}{\cos x} + c$

15. $F(x) = 2\sqrt{x+1} + c$

16. $F(x) = 2\sqrt{3 + \sin x} + c$

17. $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + c$

18. $F(x) = x \sin x + c$

19. $F(x) = \frac{\sin x}{x} + c$

20. $F(x) = x\sqrt{1+x^2} + c$

5 1. $F(x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + c$

2. $F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$

3. $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

4. $F(x) = \frac{-5}{4(x+5)^4} + c$

5. $F(x) = x^2 + 3x + c$

6. $F(x) = \frac{-1}{3(1+x^3)} + c$

7. $F(x) = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+1} + c$

6 $F'(x) = f(x)$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$.

7 $F'(x) = f(x)$ على \mathbb{R} .

الدوال $x \mapsto -x^3 + 2x^2 + x - 1 + c$ هي الدوال

الأصلية للدالة f على \mathbb{R} .

حلول التمارين والمسائل

الدوال الأسية 04

1 $e^x e^{-2x} = e^{-x} ; e^{2x} e^{3x} = e^{5x}$

$(e^x)^{-2} = e^{-2x} ; (e^{3x})^2 = e^{6x} ; e^{1-x} e^{3x+3} = e^{2x+4}$

$\frac{e^{-0.2}}{e^{0.2}} = e^{-0.4} ; \frac{e^5}{e^2} = e^3 ; e^{\frac{1}{2}} e^{-2} = e^{-\frac{3}{2}}$

2 $b = -1$ و $a = 1$

3 $c = -4 ; b = 0 ; a = 1$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe + 3 - 5e^x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$

5 $f'(x) = 2e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = 2e^x$

$f'(x) = -e^{3-x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{3-x}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = \sqrt{e^x}$

$f'(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$

$f'(x) = \frac{4e^x}{(1-e^x)^2} ; D = \mathbb{R}^* ; f(x) = \frac{5e^x - 1}{1-e^x}$

$f'(x) = 3e^{3x+1} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{3x+1}$

$f'(x) = 2 \cos 2x e^{\sin 2x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{\sin 2x}$

$f'(x) = (3x+4)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = (3x+1)e^x$

$f'(x) = (\sin x + \cos x)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^x \sin x$

$f(x) = e^{-x}(\cos 3x - \sin 3x)$

$f'(x) = e^{-x}(-4\cos 3x - 2\sin 3x) ; D = \mathbb{R}$

6 حل المعادلة $e^x = 1$ هو 0.

حلا المعادلة $e^{x^2} = e^{25}$ هما 5 و -5.

حلا المعادلة $e^{5x-1} = e^{x^2+5}$ هما 2 و 3.

حلول المعادلة $e^{\sin x} = e^{\cos x}$ هي الأعداد x

حيث $k \in \mathbb{Z} ; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

حل المعادلة $e^x + 1 = \frac{2}{e^x}$ هو 0.

8 $c \in \mathbb{R} ; F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c \cdot 1$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \cdot 2$

$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c \cdot 3$

$F(x) = -\frac{1}{x^2} + c \cdot 4$

$F(x) = \frac{3}{2x^2} + \sin x + c \cdot 5$

$F(x) = 12\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c \cdot 6$

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin(3x + \frac{\pi}{6}) + c \cdot 7$

9 $F(x) = 2\sqrt{4 + \sin x} \cdot 1$

2. الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R}

هي الدوال $c \in \mathbb{R} ; x \mapsto 2\sqrt{4 + \sin x} + c$

10 $F(x) = x + \frac{27}{2x^2} \cdot 1$

إذن $b = \frac{27}{2}$ و $a = 1$

$c \in \mathbb{R} ; G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + c \cdot 2$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + 14 \cdot 3$

11 $G(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) + c \cdot 1$

$F(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) - 1 \cdot 2$

12 العبارة الخطية لـ $\cos^3 x$ و $\cos^3 x$

هما $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

الدوال $x \mapsto \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} .

الدوال $x \mapsto -\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة g على \mathbb{R} .

حلول التمارين و المسائل

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx = e^\lambda + e^{-\lambda} - 2 \quad .6$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$

11. $f(0) = 0$: f معرفة على \mathbb{R} .
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$
 f متزايدة تماما على \mathbb{R} .
 2. $(T) : y = 5x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4e^{2x} + e^x - 5$	-	0	+
$f(x) - 5x$	+	0	+

(\mathcal{C}) فوق (T) في المجال $]-\infty; +\infty[$.
 (T) يقطع (\mathcal{C}) في النقطة $O(0; 0)$.

12. 1. $D = \mathbb{R}$. 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
 $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$. 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. 3
 $f'(x) > 0$ على \mathbb{R} : f متزايدة تماما على \mathbb{R} .
 5. يكفي إثبات أن $f(x) + f(-x) = 1$.
 6. $(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.
 7. $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$ (أ) .

ب) $g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$: $g(0) = \frac{1}{2} - f(0)$
 تغيرات g ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج) (\mathcal{C}) تحت (T) في المجال $]0; +\infty[$.
 (\mathcal{C}) فوق (T) في المجال $]0; +\infty[$.
 (\mathcal{C}) يقطع (T) عند النقطة $A(0; \frac{1}{2})$.

المعادلة $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$ لا تقبل حلا في \mathbb{R} .

حل المعادلة $e^{4x} - e^{2x} = 0$ هو 0 .

حل المعادلة $e^x + e^{-x} = 2$ هو 0 .

حل المعادلة $e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$ هو 0 .

حل المعادلة $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ هو 0 .

7. مجموعة حلول المتراجحة $e^x \geq \sqrt{e}$ هي $[\frac{1}{2}; +\infty[$.
 مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ هي $[-3; 2]$.
 مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} - e^x < 0$ هي $]0; +\infty[$.
 مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$ هي $[0; +\infty[$.
 مجموعة حلول المتراجحة $e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0$ هي $]-\infty; 0]$.
 مجموعة حلول المتراجحة $e^{x^2} e^x < (e^3)^2$ هي $]-3; 2]$.
 مجموعة حلول المتراجحة $e^{2x} > e^{x+1}$ هي $]1; +\infty[$.

8. $f(x) = e^{-x}$: $F(x) = -e^{-x}$

$f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 5e^{2x}$: $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{5}{2} e^{2x}$

$f(x) = xe^{x^2}$: $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$: $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$: $F(x) = \frac{1}{e^x + 3}$

9. $a = 2$: $b = -3$

10. 1. حل المعادلة $f(x) = 0$ هو 0 .

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ هو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

5. $k < 0$: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا واحدا سالبا .

$k = 0$: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا هو 0 .

$k > 0$: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا واحدا موجبا .

حلول التمارين و المسائل

3. حسب السؤال 2، لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) > 0 \text{ أي } \frac{e^x}{e^x - x} > 0$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4. من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{e}{e-1}$	1

6. المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب

للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $-\infty$.

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى

(\mathcal{C}) بجوار $+\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

$$f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1} : a = 1 \text{ و } b = -2$$

4. من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) = -f(x)$

و بالتالي f فردية على \mathbb{R} .

5. f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 0

إذن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة إنعطاف (\mathcal{C}) .

$$6. \text{ تنعدم } (T) : y = \frac{1}{2}x$$

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx = -\frac{2}{e} + 1 \quad 1. \quad 13$$

2. نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب I_{n+1} .

$$\text{ونجد } I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

$$3. \text{ نستعمل } I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{5}{e} + 2$$

$$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{16}{e} + 6$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$3. A(\lambda) = 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}$$

$$\text{أو أيضا } A(\lambda) = 16 [1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}] \text{ cm}^2$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}\right) = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

لدينا $g(0) = 0$.

2. ينتج أن $g(x) \geq 0$ أي $e^x - x - 1 \geq 0$

و بالتالي $e^x - x \geq 1$ أي $0 < \frac{e^x}{e^x - x} \leq e^x$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{e^x}{e^x - x} > 0$

حلول التمارين و المسائل

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

. المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $+\infty$.

. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. المنحنى (\mathcal{C}) يقبل فرع قطع مكافئ بجوار $-\infty$.

7. الدالة $f(x) - 3$ معرفة، مستمرة و متناقصة تماما على $[0; \pi]$

$$(f(0) - 3)(f(\pi) - 3) < 0 \quad \text{و}$$

إذن المعادلة $f(x) - 3 = 0$ تقبل حلا واحدا في $]0; \pi[$.

أي المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا α حيث $0 < \alpha < \pi$.

05 الدوال اللوغاريتمية

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0 \quad \text{1}$$

$$4\ln(\sqrt{2}+1) + 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2 = -\ln 32$$

$$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2} = \ln \sqrt{2}$$

$$\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$2\ln e^4 = 8 \quad ; \quad 8 - \ln \frac{1}{e} = 9$$

7. في المجال $]0; +\infty[$ ، (T) فوق (\mathcal{C})

في المجال $]0; +\infty[$ ، (T) تحت (\mathcal{C}) و عند النقطة $O(0; 0)$ ، (T) يقطع (\mathcal{C}) .

17. مجموعة التعريف هي \mathbb{R} .

2. من أجل كل عدد حقيقي x : $1 < 2 + \cos x < 3$

و $e^{1-x} > 0$. إذن من أجل كل عدد حقيقي x :

$(2 + \cos x)e^{1-x} > 0$. و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) > 0$.

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) . 3 \\ &= \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2} \quad , \quad x \text{ عدد حقيقي} \end{aligned}$$

$$2 - \sqrt{2} \leq 2 + \cos x + \sin x \leq 2 + \sqrt{2}$$

أي من أجل كل عدد حقيقي x :

$$2 + \cos x + \sin x > 0 \quad (\text{لأن } 2 - \sqrt{2} > 0)$$

$$1 \leq 2 + \cos x \leq 3 . 4$$

$$e^{1-x} < (2 + \cos x) e^{1-x} < 3e^{1-x} \quad \text{إذن}$$

أي من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x) e^{1-x} . 5$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) < 0$

و بالتالي f متناقصة تماما على \mathbb{R} .

حلول التمارين و المسائل

7 • مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(2x+7) = \ln(x-3) \text{ هي } \emptyset$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ هي } \{1\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1) \text{ هي } \{5\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ هي } \{-2; 5\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3) \text{ هي } \{1\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(x+2) \text{ هي } \left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln\sqrt{1+x}$$

$$\text{هي } \{\sqrt{1+e^4}\}$$

$$8 \bullet c = 2 : b = -11 : a = 12 \bullet 1$$

$$P(x) = (x+1)(12x^2 - 11x + 2)$$

$$P(x) = 0 \text{ هي } \left\{-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9\ln x + 2 = 0$$

$$\text{هي } \left\{\frac{1}{e}; e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{1}{4}}\right\}$$

$$\ln a^2 b^3 = 2\ln a + 3\ln b \quad 2$$

$$6\ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}} = -6\ln a - 3\ln b$$

$$\ln 500 = 2\ln 2 + 3\ln 5 \quad 3$$

$$\ln 6,25 = 2\ln 5 - 2\ln 2 : \ln \frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$$

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100} = -2\ln 2 - 2\ln 5$$

$$n \geq 1 : n \geq 10 : n \geq 4 : n \leq 9 \quad 4$$

$$5 \bullet \{e^2\} \text{ هي } \ln x = 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^{-2}\} \text{ هي } \ln x = -2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{\sqrt{e}\} \text{ هي } \ln x = \frac{1}{2} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } \ln |x| = 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } \ln x^2 = 4 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; e^{-2}\} \text{ هي } [\ln(x)]^2 = 4 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$6 \bullet \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\ln(1-x) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \text{ هي } \left\{-\frac{1}{8}\right\}$$

$$\ln(1-x)^2 = 4\ln 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\text{هي } \{-3; 5\}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -3\ln 2 \text{ هي } \{-7\}$$

$$\ln\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\ln 3 \text{ مجموعة حلول المعادلة هي } \{-2\}$$

حلول التمارين والمسائل

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$

هي $\{(e^2; e^{-2})\}$

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{2}{3} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases}$

هي \emptyset

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

هي $\left\{\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{4}\right); \left(\frac{8}{5}; 1\right)\right\}$

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} \ln(x^2 - y^2) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

هي $\left\{\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$

12 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + (\ln x)^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + (\ln x)^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\ln x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2\ln x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$

13 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{1 + x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x-3}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (\ln x)^2] = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + 2e^x}{e^{2x} - 1}\right) = -\infty$

9 • مجموعة حلول المتراجحة $\ln(3-x) \leq 0$ هي $[-2; 3]$

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$ هي $\left]-\frac{1}{2}; 0\right]$

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x+2) + \ln(3+x) > 0$ هي $\left]-\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

• مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2 - 4) > \ln(6x+5)$ هي $]3 + 3\sqrt{2}; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$ هي $\left]\frac{5}{2}; 3\right]$

10 • مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$ هي $]4; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2 + 11x + 30) > \ln(x + 14)$

هي $] -14; -8[\cup] -2; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2 - 2e^2) \leq \ln x + 1$ هي $[e\sqrt{2}; 2e]$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$ هي $\left]\frac{5}{3}; 3\right]$

11 • مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 6 \end{cases}$ هي $\{(12; 18); (18; 12)\}$

• مجموعة حلول الجملة $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$ هي $\{(2; 1); (1; 2)\}$

حلول التمارين والمسائل

$$D =]0; +\infty[: f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$b = 5 : a = -2 : D = \mathbb{R} \quad \text{15}$$

$$f(x) = -2 + \frac{5e^x}{2e^x + 1}$$

$$F(x) = -2x + \frac{5}{2} \ln(2e^x + 1) \text{ حيث } F \text{ الدالة}$$

المعرفة على \mathbb{R} هي دالة أصلية للدالة f .

$$f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x + 4} : b = -4 : a = 1 \quad \text{16}$$

الدالة الأصلية F للدالة f حيث $F(0) = 0$ معرفة

$$F(x) = e^x - 4 \ln(e^x + 4) - 1 + 4 \ln 5 \text{ كما يلي}$$

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2} \text{ إذن } \left(\frac{\sqrt[6]{6} (\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4} \sqrt[3]{6^2}} \right)^6 = \frac{2^9}{3^6} \quad \text{17}$$

$$a = \frac{6^{\frac{1}{6}} \times (2^{\frac{1}{3}})^2 \times 12^{\frac{1}{2}}}{(3^4)^{\frac{1}{3}} [(6^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} : \sqrt[4]{81^3} = 27 : \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{18}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} = 2^{\frac{59}{60}} : \frac{\sqrt[5]{4^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}} = 2^{\frac{1}{20}}$$

19

• مجموعة حلول المعادلة $4^x + 3 \times 2^x + 10 = 0$ هي \emptyset

$$9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\left\{ \frac{\ln 27 - \ln 2}{\ln 3} \right\} \text{ هي}$$

$$D = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[: f(x) = \ln(5x - 1) \quad \text{14}$$

$$f'(x) = \frac{5}{5x - 1}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7}{2} \right\} : f(x) = \ln|7 - 2x|$$

$$f'(x) = \frac{-2}{7 - 2x}$$

$$D =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[: f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

$$D =]0; +\infty[: f(x) = x^2 \ln x$$

$$f'(x) = x(1 + 2 \ln x)$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = 3x + \ln(1 + e^{-2x})$$

$$f'(x) = 3 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$D = \mathbb{R}^* : f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x} - 1}$$

$$f(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1)$$

$$D = \left] -\infty; -\frac{1}{4} \right[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$D =]-1; +\infty[: f(x) = x^2 \ln(1 + x)$$

$$f'(x) = 2x \ln(1 + x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

حلول التمارين والمسائل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$$

$$\lim_{x \geq 0} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$D =]0; 1[\cup]1; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{x^x}{\ln x}$$

$$\lim_{x \leq -1} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq -1} f(x) = +\infty$$

22 الدالة F حيث $F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}$ هي دالة

أصلية للدالة f حيث $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ على $]0; +\infty[$.

الدالة F حيث $F(x) = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x}$ هي دالة أصلية

للدالة f حيث $f(x) = x^2 \sqrt{x}$ على $]0; +\infty[$.

الدالة F حيث $F(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x$ هي دالة أصلية

للدالة f حيث $f(x) = 5^x$ على \mathbb{R} .

23 $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \geq 0} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \leq 0} f(x) = +\infty$$

3. من أجل كل عدد حقيقي x غير منعدم :

$$f'(x) = 2 \left(\ln |x| + \frac{x-1}{x} \right)$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$

4. $f(x) = 0$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$.

• مجموعة حلول المعادلة

$$\left\{ \frac{3}{2} \right\} \text{ هي } \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^x$$

• مجموعة حلول المعادلة $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x} \right)^x$ هي $\{1\}$

(يمكن الاعتماد على الحل البياني).

20 $D = \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = (\ln 2) 2^x : D = \mathbb{R} : f(x) = 2^x$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = x^2 3^x$$

$$f'(x) = x 3^x (2 + x \ln 3)$$

$$f'(x) = (1 + \ln x) x^x : D = \mathbb{R}_+^* : f(x) = x^x$$

$$D = \mathbb{R}_+^* - \{1\} : f(x) = (\ln x)^x$$

$$f'(x) = \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right) (\ln x)^x \text{ حيث } x > 1$$

$$D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[: f(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$f'(x) = \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x+1} \right) \right] \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

21 $D =]0; +\infty[$: $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq 0} f(x) = 0$$

$$D =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = x^\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \geq 0} f(x) = 0$$

$$D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[: f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

حلول التمارين و المسائل

4. من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

(لاحظ أن $1 + e^{-3x} = \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x}}$ واستعمل خواص الدالة \ln).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = 0 \quad .5$$

6. المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 4x - 4$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $+\infty$.

$$E =]\ln \sqrt{2} ; +\infty[\quad .1 \quad \text{26}$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad .2$$

من أجل كل عدد حقيقي x من E :

$$f'(x) = \frac{-14e^{2x}}{(e^{2x} + 5)(e^{2x} - 2)}$$

x	$\ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

$$g'(x) = f'(x) - 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad .3$$

الدالة g متناقصة تماما على E : $\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} g(x) = +\infty$

x	$\ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha > \ln \sqrt{2}$

المنحنى (\mathcal{C}) يقطع المستقيم ذا المعادلة $y = x - 4$

في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha > \ln \sqrt{2}$.

$$D_f =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\quad .1 \quad \text{24}$$

2. من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $D_f \in (-x)$

و $f(-x) = -f(x)$ المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مركز تناظر وهو المبدأ O .

3. $x = 1$: $x = -1$: $y = 0$ هي معادلات

المستقيمات المقاربة للمنحنى (\mathcal{C}) .

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad .4$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	0			0

$$(\Delta): y = \frac{2x}{(e-1)(e+1)} - \frac{2e}{(e-1)(e+1)} + \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) \quad .5$$

25. 1. معرفة على \mathbb{R} و من أجل كل عدد

$$f'(x) = 1 + \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}} \quad \text{حقيقي } x$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{3x}) = 0 \quad .2$$

3. $f(x)$ من الشكل $ax + b + \varphi(x)$

حيث $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 4$ مستقيم

مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $-\infty$.

06 المتتاليات العددية

1 (u_n) هي متتالية أعداد موجبة.

1. $u_0 = 2$ إذن $0 < u_0 < 3$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

إذن $6 < u_n + 6 < 9$

$0 < \sqrt{6} < \sqrt{u_n + 6} < \sqrt{9}$ بالتالي $0 < u_{n+1} < 3$

. إذن من أجل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

2. $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{8}$ إذن $u_1 > u_0$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي n : $u_n > u_{n-1}$

$$u_{n+1}^2 = u_n + 6$$

$$u_n^2 = u_{n-1} + 6$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n - u_{n-1}$$

بما أن $u_n - u_{n-1} > 0$ فإن $u_{n+1}^2 > u_n^2$

أي $u_{n+1} > u_n$

. إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2 (u_n) متتالية أعداد موجبة.

1. $u_0 = 1$ إذن $u_0 < 2$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي n : $u_n < 2$

نبرهن أن $u_{n+1} < 2$. $u_n < 2$ إذن $2 + u_n < 4$

بالتالي $\sqrt{2 + u_n} < 2$. ينتج أن $u_{n+1} < 2$

$$2. \text{ لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n + u_n}}$$

هذا العدد موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي n .

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < u_{n+1}$

بالتالي (u_n) متزايدة.

$$3 \text{ } u_0 = 9 \text{ و } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$$

1. يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

2. احسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

و أدرس إشارة $-u_n^2 + u_n + 5$.

$$4 \text{ } u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = 2u_n - 3$$

لاحظ أن $2u_n - 3 = 6 - 2^{n+1}$ و $2u_n - 3 = 3 - 2^{n+1}$

أي $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$ (باستعمال الاستدلال بالتراجع) .

$$5 \text{ } u_0 = 1 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n}$$

$$1. \text{ لاحظ أن } u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n} = 1 - \frac{3}{4 + u_n}$$

. نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_n \geq 0$. ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 - \frac{3}{4 + u_n} \leq 1 \text{ أي } u_{n+1} \leq 1$$

2. الدالة $x \mapsto \frac{3 + x}{4 + x}$ متزايدة على المجال $[0, 1]$.

(استعمال الدالة المشتقة).

3. المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N}

حلول التمارين و المسائل

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 \quad \text{11}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \quad \text{12} \quad \text{لاحظ أن}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad \text{و} \quad u_1 = 2, u_0 = 1 \quad \text{13}$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} \quad \text{لاحظ أن}$$

$$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$$

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$

$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$$

و بالجمع طرفا لطرف و التبسيط نجد

$$u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0$$

$$u_{n+1} = u_n + 1 \quad \text{أي}$$

إذن . (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ و أساسها $r = 1$.

. من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = n + 1$

. (u_n) متزايدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n \quad \text{و} \quad u_0 = 2 \quad \text{14}$$

$M_n(u_n; u_{n+1})$ هي نقطة من التمثيل البياني.

$$\dots : M_3(7; -13) : M_1(-3; 7) : M_0(2; -3)$$

$$\text{6} \quad \text{العدد } 1 - 4^1 \text{ مضاعف العدد 3.}$$

$$4^{n+1} - 1 = 4(4^n) - 1$$

$$= (3+1)4^n - 1$$

$$= 3 \times 4^n + (4^n - 1)$$

$$\text{7} \quad \text{العدد } 7 \times 3^0 + 4 \text{ يقبل القسمة على 11.}$$

نفرض أن $7 \times 3^{5n} + 4$ يقبل القسمة على 11.

$$7 \times 3^{5n+5} + 4 = 7 \times 3^{5n} \times 3^5 + 4 \quad \text{لدينا}$$

$$= 7 \times 3^{5n} \times 243 + 4$$

$$= 7 \times 3^{5n} \times (242 + 1) + 4$$

$$= (11 \times 22 \times 7 \times 3^{5n}) + (7 \times 3^{5n} + 4)$$

ينتج أن العدد $7 \times 3^{5n+5} + 4$ يقبل القسمة على 11.

$$\text{8} \quad \text{الخاصية محققة من أجل } n = 0.$$

نفرض أن $4^n - 3n - 1$ يقبل القسمة على 9

$$\text{لدينا } 4(4^n - 3n - 1) = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 - 9n$$

$$\text{أي } 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4(4^n - 3n - 1) + 9n$$

نستنتج أن $4^{n+1} - 3(n+1) - 1$ يقبل القسمة على 9.

$$\text{9} \quad \text{من أجل } n = 0, n^3 - n \text{ يقبل القسمة على 3.}$$

$$\text{لاحظ أن } (n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

$$= 3k_1 + 3k_2 = 3k'$$

$$\text{10} \quad \text{من أجل } n = 0, (1+a)^0 \geq 1.$$

نفرض أن $(1+a)^n \geq 1 + na$ حيث n عدد طبيعي

$$\text{لدينا } (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+an)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

حلول التمارين و المسائل

$$M_1\left(-\frac{1}{2}; 3\right) : M_0\left(3; -\frac{1}{2}\right)$$

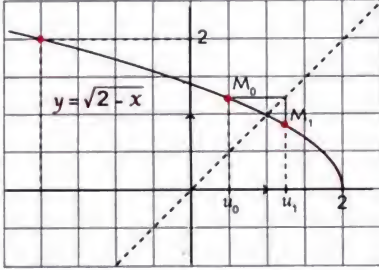
$$M_4\left(-\frac{1}{2}; 3\right) : M_2\left(3; -\frac{1}{2}\right)$$

$u_n = 3$ من أجل n زوجي

$u_n = -\frac{1}{2}$ من أجل n فردي

التخمين : (u_n) ليس متقاربة و ليس لها نهاية.

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ و } u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{16}$$



$$M_0\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; u_3\right)$$

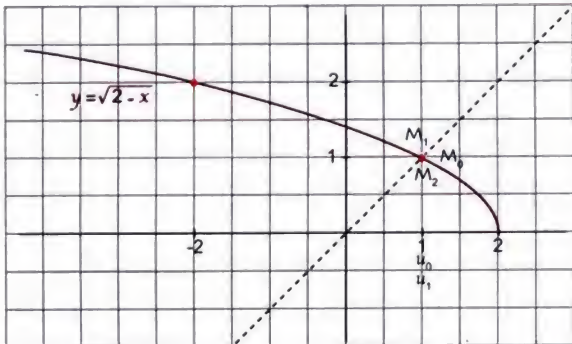
$$M_2(u_3; u_4)$$

(u_n) متقاربة و نهايتها l تحقق $f(l) = l$

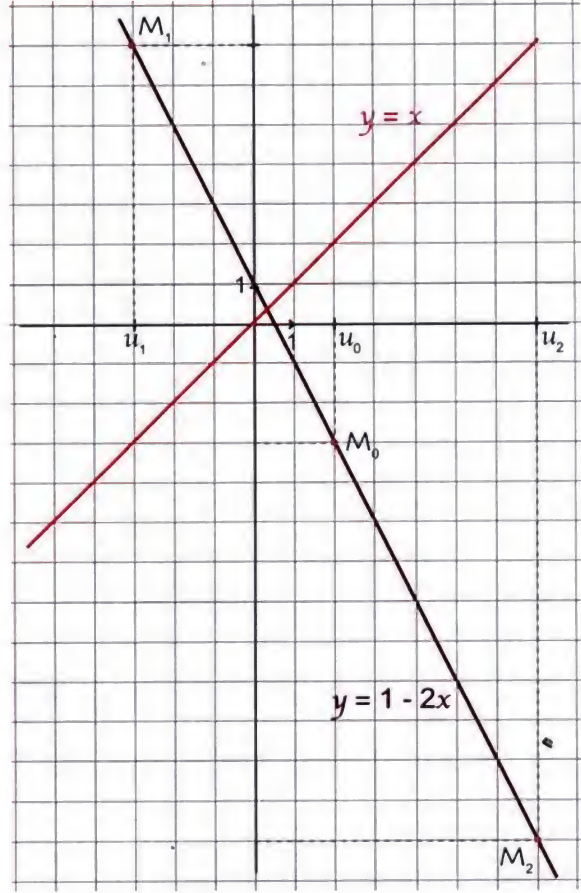
أي $\sqrt{2-l} = l$ و نجد $l = 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ و } u_0 = 1 \quad \text{17}$$

$$M_2(1;1) : \dots M_2(1;1) : M_1(1;1) : M_0(1;1)$$



المتتالية ثابتة $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

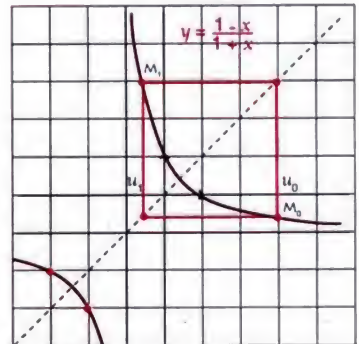


التخمين : المتتالية (u_n) ليست متقاربة.

حدود المتتالية (u_n) متناوبة في الإشارة و النقط M_n تبتعد أكثر فأكثر في الجهتين.

المتتالية (u_n) ليس لها نهاية.

$$u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \text{ و } u_0 = 3 \quad \text{15}$$



$$u_0 = \frac{1}{7} \quad (20)$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2} \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

نبرهن بالتراجع على \mathbb{N} أن $u_n \leq \frac{3}{4}$.

$$u_n = \frac{n+1}{n} \quad (21) \quad (u_n) \text{ متناقصة و متقاربة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{و}$$

$$v_n = -n \quad (v_n) \text{ متناقصة و متباعدة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \quad \text{و}$$

$$u_n = 2^{n-1} \quad (22) \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{و أساسها } q = 2 \quad u_n \text{ متزايدة و غير}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{متقاربة و}$$

$$v_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad (v_n) \text{ متتالية هندسية حدها الأول}$$

$$v_0 = 3 \quad \text{و أساسها } q = \frac{1}{3} \quad (v_n) \text{ المتتالية متناقصة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{و متقاربة و}$$

$$u_n = \frac{-1}{2^{n-1}} \quad (23)$$

$$(u_n) \text{ متزايدة و متقاربة و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$v_n = (-2)^{n-1} \quad (v_n) \text{ المتتالية غير رتيبة و متباعدة}$$

(v_n) ليس لها نهاية.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (24)$$

$$u_n = f(n) \text{ من الشكل } u_n = f(n) \text{ من دراسة تغيرات } f$$

ينتج أن (u_n) متناقصة

(يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع).

$$1. \quad \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \quad (18)$$

$$\text{من أجل } n \geq 1 : \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{و} \quad \frac{2}{n} \leq 2$$

و بالتالي $1 \leq u_n \leq 3$ أي (u_n) محدودة.

$$2. \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

$$= n + \frac{1}{n}$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \leq u_n$$

(u_n) محدودة من الأسفل.

$$3. \quad u_n = \frac{n+3}{2n-1}$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم : } u_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{و } u_0 = -3 \quad \text{إذن } (u_n) \text{ محدود من الأسفل بالعدد } -3.$$

$$1. \quad u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \quad (19)$$

من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

$$0 < \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} < 1$$

إذن (u_n) محدودة.

$$2. \quad u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \sqrt{n^2 + 1} - n \quad \text{و } u_n = f(n)$$

إذن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

$$3. \quad u_n = 4^n - 3^n$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq 4^n - 3^n$$

(u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0.

حلول التمارين والمسائل

29 $u_n = \frac{n^4}{n!}$ حيث n عدد طبيعي.

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 0$.

إذن (u_n) محدودة من الأسفل و متناقصة بدءاً من u_3 .

عند استعمال الاستدلال بالتراجع لاحظ أن $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

إذن (u_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

30 $u_0 = 2$ و $2u_n = u_{n+1} + 1$ و $v_n = u_n - 1$

1. نجد $v_{n+1} = 2v_n$. إذن (v_n) متتالية هندسية

حيث $v_0 = 1$ و $q = 2$.

2. لدينا $v_n = 2^n$

إذن $u_n = 2^n - 1$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

31 $u_0 = 3$ و $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} - 4$

1. (u_n) متناقصة. (استعمال الاستدلال بالتراجع)

2. $v_n = u_n + 6$ نبرهن أن $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$.

حيث (v_n) متتالية هندسية. $v_0 = 9$ و $q = \frac{1}{3}$

و $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3. (v_n) متتالية هندسية مع $0 < q < 1$ و $v_0 = 9$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -6$.

32 $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+2}{n+2}$

المتتالية (u_n) متزايدة لأن الدالة المرفقة بها

متزايدة على $[0; +\infty[$. المتتالية (v_n) متناقصة

لأن الدالة المرفقة بها متناقصة على $[0; +\infty[$.

2. (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل، فهي

متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

25 1. $q = \frac{1}{3}$ و $u_0 = -2$. $0 < q < 1$

و $u_0 < 0$. إذن المتتالية الهندسية متناقصة.

2. $u_0 = \frac{1}{3}$ و $q = -\frac{\sqrt{1}}{3}$.

$q < 0$ إذن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

26 1. $v_0 = 1$ و $q = 2$

$v_0 > 0$ و $q > 1$ إذن المتتالية الهندسية (v_n) متزايدة.

2. $v_0 = -1$ و $q = -3$

$q < 0$ المتتالية الهندسية (v_n) ليست رتيبة.

27 1. $u_0 = 1$ و من أجل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \sqrt{n+7}$ لاحظ أن $\sqrt{n+6} < \sqrt{n+7}$

إذن (u_n) متزايدة.

2. $v_0 = 8$ و $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 1}$

باستعمال الاستدلال بالتراجع يمكن إثبات

أن (v_n) متناقصة.

28 $u_n = 1 + n + \sin n$

1. $n \leq u_n \leq 2 + n$

2. المتتاليتان الحسابيتان (v_n) و (w_n) معرفتان

كما يلي : $v_n = 2 + n$ و $w_n = n$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

حلول التمارين و المسائل

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (35)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

إذن $u_{n+1} - u_n > 0$ متزايدة.

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ متناقصة.

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ و $v_n - u_n = \frac{1}{n}$

إذن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

$$u_2 = 13 : u_1 = 6 : u_0 = 1 \quad (36)$$

$$u_4 = 41 : u_3 = 24$$

3.2. نستعمل الاستدلال بالتراجع.

$$u_0 = 1 \quad .4$$

$$u_1 = u_0 + 1^2 - 1 + 5$$

$$u_2 = u_1 + 2^2 - 2 + 5$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$$

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + u_n = 1 + (u_0 + \dots + u_{n-1})$$

$$+ (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$- (1 + 2 + \dots + n) + 5n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 2 : u_n - v_n = \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right)$$

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$$

$$v_n = \frac{3n^2 + 4}{n^2 + 1} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{3n + 4}{n + 1} \quad (33)$$

كل من (u_n) و (v_n) متناقصة.

إذن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \quad (34)$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{(n+1)!} > 0$

إذن (u_n) متزايدة. $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{n+1}{n \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)(n+1)!}$$

وبعد التبسيط نجد $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(n+1)! \cdot n \cdot (n+1)}$

إذن $v_{n+1} - v_n < 0$ وبالتالي (v_n) متناقصة.

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 : v_n - u_n = -\frac{1}{n \cdot n!}$

(u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

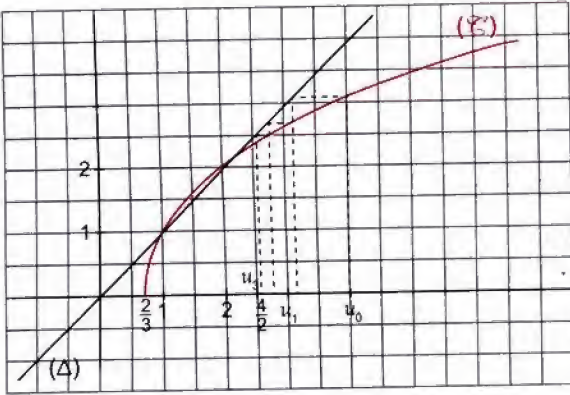
حلول التمارين والمسائل

5. (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن (u_n) متقاربة.
لإيجاد نهاية (u_n) عند $+\infty$ ، نحل المعادلة $\ell = f(\ell)$
ونجد $\ell = \sqrt{3}$.

38. 1. $u_2 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2}$; $u_1 = \sqrt{10}$; $u_0 = 4$

$$u_3 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2} - 2$$

2. أ - ب.



ج) المتتالية (u_n) متقاربة.

3. ثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n \geq 2 \text{ لدينا } u_0 \geq 2$$

بفرض $u_n \geq 2$ ينتج أن $3u_n - 2 \geq 4$ أي $\sqrt{3u_n - 2} \geq 2$

4. من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n} \leq 0$$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n \leq 0$ إذن (u_n) متناقصة.

5. (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل

إذن (u_n) متقاربة.

$$\ell = 2 \quad 6.$$

بعد التبسيط نجد :

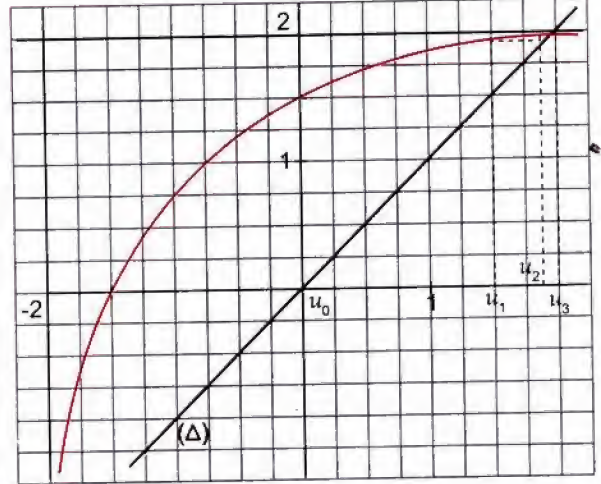
$$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 5n$$

$$u_n = 1 + 5n + \frac{(n-1)(n)(n+1)}{3} \quad \text{أي}$$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذن (u_n) ليست متقاربة.

37. 1. $u_3 = \frac{45}{26}$; $u_2 = \frac{12}{7}$; $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_0 = 0$

2. أ - ب.



ج) المتتالية (u_n) متقاربة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} \quad 3.$$

نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$3 - u_n^2 > 0 \quad \text{و أن من أجل كل عدد طبيعي } n :$$

$$u_n + 2 \geq 0$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1 + u_n}{2 + u_n} \quad 4.$$

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2$

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = -1 \quad ; \quad \gamma = 1 \quad \text{5}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \left[-\frac{1}{x^2} - \ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$$

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \sin 2x \quad ; \quad I_1 + I_2 = x \cdot 1 \quad \text{6}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \quad ; \quad I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \quad .2$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad ; \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \quad .3$$

(استعمل العلاقتين السابقتين).

$$\int_{-2}^4 |x^2 - 4| dx = \frac{64}{3} \quad ; \quad \int_{-1}^3 |x - 2| dx = 5 \quad \text{7}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 2 - \frac{2}{x} \right| dx = 1 \quad ; \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = 2$$

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt = \frac{1}{4} \cdot 1 \quad \text{8}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2t + 1) dt = \frac{25}{4}$$

$$\int_{-1}^2 |2t + 1| dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^2 (2t + 1) dt \quad .2$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \leq 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{9}$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \geq 0 \quad ; \quad x \geq 1$$

2. من أجل كل عدد حقيقي t موجب تماما :

$$\left(\frac{1}{2} t^2 - t \ln t \right)' = t - 1 - \ln t$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 - t \ln t \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} - x \ln x$$

07 الحساب التكاملي

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx = \ln 2 \quad ; \quad \int_{-1}^2 (x^2 + x) dx = \frac{9}{2} \quad \text{1}$$

$$\int_{-3}^{-1} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{-1} (t + 3)^3 dt = 4 \quad ; \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \left(\frac{1}{2} x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx = -1 + e$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln 2 \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2x}{4 - x^2} dx = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \quad \text{2}$$

$$\int_e^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln|x - 2| - \frac{1}{2} \ln|x + 2| \right]_0^1 \quad .2$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3$$

3. وحدة المقامات وبسط العبارة.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx = \left[\frac{1}{4} (\ln|x - 3| - \ln|x + 1|) \right]_0^2 \quad .2$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3$$

$$b = -1 \quad ; \quad a = 1 \quad .1 \quad \text{4}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^2 \quad .2$$

$$= \ln \frac{4}{3}$$

حلول التمارين والمسائل

$$A = \frac{25}{4} \text{ cm}^2 \quad .2 \quad \textcircled{13}$$

$$A = \int_1^e [g(x) - f(x)] dx \quad .2 \quad \textcircled{14}$$

$$= e^{e-1} - 2$$

$$A(a) = -(a+1)e^{-a} + 1 \quad .2 \quad \textcircled{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-(a+1)e^{-a} + 1] = 1 \quad .3$$

$$\text{إذن } \tau = MH = \frac{R(h-z)}{h} \quad \textcircled{16}$$

$$v = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} (h-z)^2 dz = \frac{\pi h R^2}{3}$$

$$\int_2^3 \ln(x-1) dx = 2 \ln 2 - 1 \quad .2 \quad \textcircled{17}$$

$$\int_2^3 \ln(x+1) dx = 8 \ln 2 - 3 \ln 3 - 1 \quad .3$$

$$A = \left(\ln \frac{64}{27} \right) \text{ cm}^2 \quad .4$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2} (2 - \ln x) \quad \textcircled{18}$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

$$A = \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^{e^2} - 2 \left[2\sqrt{x} \right]_1^{e^2} = 4 \quad .2$$

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2} : [1; m] \quad \textcircled{19}$$

$$A(m) = \int_1^m \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \ln m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(m) = 1 \quad .2$$

$$u = -1 \quad .2 \quad ; \quad u = 3 - 2e \quad .1 \quad \textcircled{10}$$

$$u = 0 \quad .4 \quad ; \quad u = \frac{1}{8} \left(\frac{e^2 - 7}{e - 1} \right) \quad .3$$

$$u = -6 \quad .6 \quad ; \quad u = \frac{14}{5} \quad .5$$

$$u = \frac{1}{2} \quad .8 \quad ; \quad u = \frac{1}{2} \quad .7$$

$$\int_0^1 (3-t)e^t dt = 3e - 4 ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \textcircled{11}$$

$$\int_0^{\pi} (3x+2) \sin x dx = 3\pi + 4$$

$$\int_0^{\pi} (-x+3) \cos x dx = 2$$

$$\int_1^x t \ln t dt = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} ; \int_0^2 x e^x dx = e^2 + 1$$

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1) \sin (2x^2-x) dx = -\cos \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + 1$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2 \quad \textcircled{12}$$

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1) e^t dt = 4e - 8$$

$$\int_0^1 t^2 e^{3t} dt = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

$$\int_0^{\pi} e^t \sin t dt = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1) ; \int_0^{\pi} e^t \cos t dt = -\frac{1}{2} (e^{\pi} + 1)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx = \frac{3}{13} (e^{-\pi} - e^{\pi})$$

$$\int_0^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx = \frac{8}{9} e^3 + \frac{4}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt = \frac{1}{8} \pi^2 - \frac{1}{2}$$

حلول التمارين والمسائل

3. على المجال $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ ، $f(x) \leq 0$.

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-x \ln x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x dx \quad \text{إذن}$$

$$A = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \quad \text{أي} \quad \approx 0,148$$

22. 1. $f(x) = -x \ln x$ على المجال $]0; 1[$

$$f(1) = 0$$

$$f(x) = x \ln x \quad \text{على} \quad]1; +\infty[$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

إذن f مستمرة عند 0 عن اليمين و عند 1
وبالتالي f مستمرة على $[0; +\infty[$.

f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين.

f ليست قابلة للاشتقاق عند 1 و بالتالي f لا تقبل
الإشتقاق على $[0; +\infty[$.

ملاحظة: f قابلة للاشتقاق على $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$

$$2. \quad f'(x) = -1 - \ln x \quad \text{على المجال} \quad]0; 1[$$

$$f'(x) = 1 + \ln x \quad \text{على المجال} \quad]1; +\infty[$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

3. على المجال $]0; 1[$: $f(x) \geq 0$.

$$A(t) = \int_t^1 f(x) dx \quad \text{إذن}$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} A(t) = \frac{1}{4}$$

$$20. \quad 1. \quad f'(x) = 4(1-x)e^{-2x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	e^{-2}	0

$$3. \quad A(\lambda) = \frac{1}{2e} - \lambda e^{-2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{2e}$$

4. من أجل كل عدد حقيقي x : $H'(x) = h(x)$

إذن H دالة أصلية لـ h على \mathbb{R} .

$$5. \quad v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{8} (5e^2 - e^{-2})$$

$$v = \frac{\pi}{8} (5e^2 - e^{-2}) \approx 18,4 \text{ cm}^3 \quad \text{إذن}$$

21. 1. معرفة عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{و}$$

إذن f مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

إذن f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

$$2. \quad f'(x) = 1 + \ln x \quad \text{على} \quad]0; +\infty[$$

$$f'(x) = 1 + \ln(-x) \quad \text{على} \quad]-\infty; 0[$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$